

# Inversion de bancs de filtres $M$ bandes sur-échantillonnés

Jérôme Gauthier, Laurent Duval  
 Institut Français du Pétrole  
 1 et 4, avenue de Bois-Préau,  
 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France  
 {jerome.gauthier,laurent.duval}@ifp.fr

## I. INTRODUCTION

Les transformations par bancs de filtres représentent une classe de méthodes en traitement du signal très large. Par exemple, les transformées à recouvrement, introduites par H. Malvar [1] à la fin des années 80 ou les ondelettes discrètes, sont des cas particuliers de bancs de filtres. Les transformées à recouvrements sont appliquées à de nombreux problèmes de traitement du signal, par exemple pour la réduction des effets de blocs en audio [2] ou l'estimation de mouvement en vidéo [3]. Récemment Microsoft a annoncé que ce type de méthodes sera employé dans le futur format d'image *Windows Media Photo*. L'ajout de redondance à ces transformations permet d'obtenir une plus grande flexibilité dans les choix d'applications. Ainsi dans un travail précédent, nous avons pu montrer l'intérêt des transformées à recouvrement sur-échantillonnées pour le filtrage directionnel des données sismiques [4].

Cependant la construction des bancs de filtres de synthèse dans le cas sur-échantillonné et pour des filtres à réponse impulsionnelle finie, permettant d'obtenir une reconstruction parfaite pour le couple de bancs de filtres analyse/synthèse, reste problématique aussi bien en théorie qu'en pratique. La question pour certaines valeur de redondance a déjà été étudiée [4], [5] mais, dans le cas le plus général où on suppose la redondance libre, le problème demeure délicat. Le but de ce travail est de s'intéresser au cas théorique général de redondance libre avec des transformées potentiellement multi-dimensionnelles. Les applications des bancs de filtres ainsi construits ne seront pas traitées ici.

Dans une première partie nous allons introduire le problème et les notations utilisées dans ce travail. Nous nous intéresserons ensuite à l'existence d'un banc de filtres de synthèse pour un banc de filtres d'analyse donné. Pour cela nous serons amené à séparer le problème en deux cas suivant la nature uni- ou multi-dimensionnelle des transformations. Nous proposerons également une méthode pour calculer explicitement un banc de filtres de synthèse. Enfin nous expliquerons comment et avec quels outils mettre en œuvre ces méthodes, nous évoquerons notamment des logiciels classiques de calcul scientifique tels que Matlab ou Maple, mais aussi le programme plus spécifique et principalement utilisé dans le milieu de la recherche qu'est Singular.

## II. REPRÉSENTATION POLYPHASE DES BANCs DE FILTRES

### A. Notations

Nous allons dans un premier temps introduire les notations utiles à la représentation polyphase des bancs de filtres tels que celui représenté figure 1 dans le cas uni-dimensionnel. Le signal  $(x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est décomposé à l'aide de  $M$  filtres de réponses impulsionnelles notées :  $(h_i)_{0 \leq i < M}$ , de longueur finie  $kN$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Une étape de décimation d'un facteur  $N$  est alors appliquée sur les résultats des filtrages. Du point de vue des transformées à recouvrement, cela revient à un chevauchement de  $k - 1$  blocs de tailles  $N$ . Enfin, les  $M$  sorties du banc de filtres d'analyse seront notées :  $(y_i(n))_{0 \leq i < M}$ . Le redondance globale de cette transformation est alors exprimée par  $M/N = k'$ . Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au cas sur-échantillonné, *i.e.*  $k' > 1$ .

Avec les notations introduites, les sorties du banc de filtres d'analyse s'écrivent, pour tout  $i \in \{0, \dots, M - 1\}$

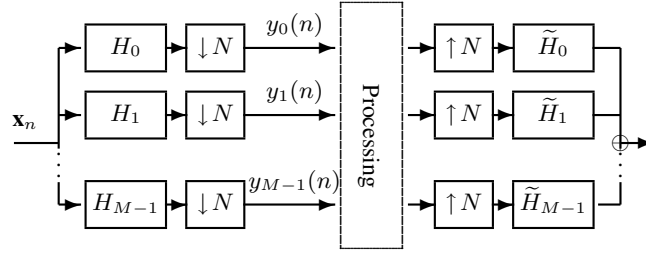


Fig. 1: Banc de filtres uni-dimensionnel,  $M$  bandes, sur-échantillonné.

et  $n \in \mathbb{Z}$ , sous la forme :

$$\begin{aligned} y_i(n) &= \sum_p h_i(p)x(Nn - p) \\ &= \sum_{\ell} \sum_{j=0}^{N-1} h_i(N\ell + j)x(N(n - \ell) - j). \end{aligned} \quad (1)$$

Soient  $\mathbf{H}(\ell) = (h_i(N\ell + j))_{0 \leq i < M, 0 \leq j < N}$ ,  $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$  les  $k$  matrices obtenues à partir des réponses impulsionnelles des filtres. Nous définissons alors le vecteur polyphase [6] pour le signal d'entrée  $x(n)$  :  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{x}(n) = (x(Nn - j))_{0 \leq j < N}$ . L'équation Eq. (1) peut être réécrite sous une forme plus concise comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= (y_0(n), \dots, y_{M-1}(n))^\top \\ &= \sum_{\ell} \mathbf{H}(\ell)\mathbf{x}(n - \ell) = (\mathbf{H} * \mathbf{x})(n), \end{aligned} \quad (2)$$

ou encore de manière équivalente,  $\mathbf{y}[z] = \mathbf{H}[z]\mathbf{x}[z]$ , où  $\mathbf{H}[z] = \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbf{H}(\ell)z^{-\ell}$  est la matrice polyphase de transfert de taille  $M \times N$  du banc de filtres d'analyse, et  $\mathbf{x}[z]$  ainsi que  $\mathbf{y}[z]$  sont les transformées en  $z$  de  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(\mathbf{y}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , respectivement. Nous définissons de manière similaire la matrice polyphase de transfert pour le banc de filtres de synthèse :  $\tilde{\mathbf{H}}[z] = \sum_{\ell} \tilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell}$  qui vérifie :

$$\tilde{\mathbf{x}}[z] = \tilde{\mathbf{H}}[z]\mathbf{y}[z].$$

Le vecteur polyphase de  $(\tilde{\mathbf{x}}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est défini de la même manière que pour  $(\mathbf{x}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  et on peut prouver que

$$\tilde{\mathbf{H}}(\ell) = (\tilde{h}_j(N\ell - i))_{0 \leq i < N, 0 \leq j < M}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Les expressions précédentes sont vraies pour tous bancs de filtres sur-échantillonnés uni-dimensionnels.

### B. Notations dans le cadre multi-dimensionnel

En dimension supérieure on obtient des expressions très similaires. Notons  $L$  la dimension. Dans ce cas nous travaillons donc sur des multi-indices que nous écrirons  $\mathbf{i}$  pour  $(i_1, \dots, i_L)$ . Par ailleurs, nous travaillons désormais avec  $L$  variables complexes  $\mathbf{z} = z_1 \cdots z_L$  à la place de  $z$ . Nous noterons  $\mathbf{z}^{\mathbf{p}} = z_1^{p_1} \cdots z_L^{p_L}$  l'exponentiation de  $\mathbf{z}$  par le multi-indice  $\mathbf{i}$ .

On obtient alors en suivant le même processus que ci-dessus l'expression :

$$Y_{\mathbf{i}}[\mathbf{z}] = \sum_{j_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{j_L=0}^{k_L-1} H_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\mathbf{z}]X_{\mathbf{j}}[\mathbf{z}],$$

avec :  $H_{\mathbf{i},\mathbf{j}}[\mathbf{z}] = \sum_{\mathbf{l}} H_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(\mathbf{l})\mathbf{z}^{-\mathbf{l}}$ .

Pour nous ramener à un cas plus proche de celui étudié précédemment on peut également vectoriser l'expression ci-dessus. On obtient alors une expression de la forme :

$$y_i[\mathbf{z}] = \sum_{j=0}^{k_1 \dots k_L - 1} \mathbf{H}_{i,j}[\mathbf{z}] x_j[\mathbf{z}],$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, M_1 \dots M_L - 1\}$ , ce qu'on peut écrire sous la forme du produit matriciel :

$$\mathbf{y}[\mathbf{z}] = \mathbf{H}[\mathbf{z}] \mathbf{x}[\mathbf{z}].$$

### III. EXISTENCE ET RECHERCHE D'UN BANC DE FILTRES DE SYNTHÈSE

Le but de ce travail est double, on souhaite s'assurer de l'existence d'un banc de filtres de synthèse présentant la propriété de reconstruction parfaite et également calculer un tel banc de filtres. L'écriture polyphase nous permet d'exprimer facilement cette propriété [6] : nous cherchons une matrice  $\tilde{\mathbf{H}}[z]$  dans  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{N \times M}$  telle que  $\tilde{\mathbf{H}}[z] \mathbf{H}[z] = \mathbf{I}_N$ .

#### A. Cas uni-dimensionnel

La matrice que nous étudions appartient à l'anneau  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{M \times N}$  des matrices polynomiales de Laurent de dimension  $M \times N$ . Notre but est de trouver une matrice polynomiale inverse dans  $\mathbb{C}[z, z^{-1}]^{N \times M}$  ; ce qui revient à dire que l'on désire un banc de filtres de synthèse à réponse impulsionnelle finie.

Pour prouver l'existence pratique d'un tel système inverse nous utiliserons le théorème suivant [7] :

**Théorème 1** Soit  $\mathbf{H}[z] \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{M \times N}$  une matrice polynomiale avec  $M > N$ . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- 1)  $\mathbf{H}[z]$  est "coprime", ce qui signifie que ses déterminants mineurs maximaux sont premiers mutuellement,
- 2)  $\mathbf{H}[z]$  est inversible à gauche, au sens où il existe  $\mathbf{M}[z] \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]^{N \times M}$  tel que  $\mathbf{M}[z] \mathbf{H}[z] = \mathbf{I}_N$ .

La première condition peut être utilisée directement pour déterminer si la matrice polyphase de transfert est inversible ou non. En particulier, nous avons proposé d'employer [8] la méthode numérique suivante, vérifiant la première condition du théorème, pour résoudre le problème :

- ① Extraire une sous-matrice maximale  $\mathbf{H}_e[z]$  de  $\mathbf{H}[z]$ .
- ② Calculer  $\det(\mathbf{H}_e[z])$ , et déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}_e$  de ses racines.
- ③ Considérer une autre sous-matrice maximale. Retirer de  $\mathcal{S}_e$  les éléments qui ne correspondent pas à des racines du déterminant de cette sous-matrice.
- ④ Répéter l'étape ③ jusqu'à avoir épuisé toutes les sous-matrices ou que  $\mathcal{S}_e = \emptyset$ .
- ⑤ Si  $\mathcal{S}_e = \emptyset$  alors la matrice de transfert polyphase est inversible à gauche, sinon elle ne l'est pas.

#### B. Cas multi-dimensionnel

Dans le cadre multi-dimensionnel le théorème ci dessus reste vrai, mais la méthode précédente, bien adaptée au cas uni-dimensionnel dans lequel les polynômes de Laurent manipulés ne dépendent que d'une variable, est difficilement utilisable dans le cas où les polynômes dépendent de plusieurs variables. Dans ce cas des outils algébriques existent nous permettant de vérifier le théorème : les bases de Gröbner [9], qui furent introduite pour la première fois en 1965 dans la thèse de B. Buchberger [10], étudiant de W. Gröbner. Nous allons maintenant présenter brièvement ces méthodes introduites dans le cadre de l'inversion de bancs de filtres multi-dimensionnel par H. Park et M. Vetterli [11] et utilisées récemment par J. Zhou et M. N. Do [12].

Supposons que l'on ait défini un ordre sur l'ensemble  $\mathcal{T}$  des monômes de  $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$ , par exemple l'ordre lexicographique. Soit un polynôme  $P(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}[\mathbf{z}]$  on appelle monôme dominant de  $P$  le monôme le plus grand pour l'ordre que l'on s'est donné. On le note  $\text{lt}(P)$ .

Pour un idéal  $I \subset \mathbb{C}[\mathbf{z}]$ , on notera

$$\text{lt}(I) = \{\text{lt}(P) \mid P \in I\}.$$

Une famille  $G = \{P_1, \dots, P_n\} \subset I$  est appelée une base de Gröbner de  $I$  si

$$\langle \text{lt}(P_1), \dots, \text{lt}(P_n) \rangle = \text{lt}(I);$$

c'est-à-dire si l'idéal engendré par les  $\text{lt}(P_i)$  coïncide avec  $\text{lt}(I)$ .

Si de plus  $G$  vérifie :

- pour tout  $P \in G$  le coefficient de  $\text{lt}(P)$  est 1,
- pour tout  $P \in G$  aucun monôme de  $P$  appartient à  $\langle \text{lt}(G) - \{P\} \rangle$ ,

on dit alors que  $G$  est une base de Gröbner réduite.

À l'aide de ces définitions, revenons au problème d'inversion. Comme précédemment, nous devons prouver l'existence d'une matrice polynomiale vérifiant :  $\tilde{\mathbf{H}}[\mathbf{z}]\mathbf{H}[\mathbf{z}] = \mathbf{I}$ . Le théorème suivant [12] permet de faire le lien entre les bases de Gröbner réduites et l'inversibilité :

**Théorème 2** Soit  $\mathbf{H}[\mathbf{z}] \in \mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{z}^{-1}]^{M \times N}$  une matrice polynomiale avec  $M > N$ . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

- 1)  $\mathbf{H}[\mathbf{z}]$  est telle que la base de Gröbner réduite de ses déterminants mineurs maximaux est  $\{1\}$ ,
- 2)  $\mathbf{H}[\mathbf{z}]$  est inversible à gauche au sens où il existe une matrice polynomiale  $\tilde{\mathbf{H}}[\mathbf{z}] \in \mathbb{C}[\mathbf{z}, \mathbf{z}^{-1}]^{N \times M}$  telle que  $\tilde{\mathbf{H}}[\mathbf{z}]\mathbf{H}[\mathbf{z}] = \mathbf{I}$ .

Il ne reste plus qu'à calculer les déterminants de toutes les sous-matrices de tailles maximale de  $\mathbf{H}[\mathbf{z}]$  puis de rechercher la base de Gröbner réduite de cette famille de polynômes. L'algorithme de Buchberger permet de calculer pratiquement une base de Gröbner, le passage à la base réduite peut se faire simplement également.

### C. Calcul de l'inverse

Nous avons vu comment s'assurer de l'inversibilité à gauche d'une matrice polynomiale  $\mathbf{H}[\mathbf{z}]$  dans les cas où l'on travaille avec une ou plusieurs variables. Nous allons proposer une méthode ici de calcul explicite de l'inverse. La méthode étant la même dans les deux cas, nous allons présenter ici le cas uni-dimensionnel, plus simple à exprimer.

$\mathbf{H}[z]$  est ici supposé inversible à gauche par une matrice polynomiale  $\tilde{\mathbf{H}}[z]$  (matrice polynomiale de transfert du banc de filtres de synthèse), il existe donc un entier  $p$  tel que :  $\tilde{\mathbf{H}}[z] = \sum_{\ell=1-p}^0 \tilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell}$ . On a alors

$$\tilde{\mathbf{H}}[z]\mathbf{H}[z] = \sum_{\ell=1-p}^0 \tilde{\mathbf{H}}(\ell)z^{-\ell} \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbf{H}(\ell)z^{-\ell} = \sum_{\ell=1-p}^{k-1} \mathbf{U}(\ell)z^{-\ell},$$

avec

$$\mathbf{U}(\ell) = \sum_{s=1+\max(\ell-k, -p)}^{\min(0, \ell)} \tilde{\mathbf{H}}(s)\mathbf{H}(\ell-s).$$

La condition de reconstruction parfaite est équivalente à :  $\mathbf{U}(\ell) = \delta_{\ell}\mathbf{I}_N$ , ce qui nous conduit au système linéaire suivant :

$$\mathcal{H}\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{U} \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^{\top} &= [\tilde{\mathbf{H}}(1-p), \dots, \tilde{\mathbf{H}}(0)], \\ \mathcal{U}^{\top} &= [\mathbf{0}_{N, (p-1)N} \ \mathbf{I}_N \ \mathbf{0}_{N, (k-1)N}], \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{H}^{\top} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(k-1) & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{H}(0) & \cdots & \mathbf{H}(k-1) \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à tenter de résoudre le système ci-dessus en augmentant la valeur de  $p$ . Comme on sait que le système est inversible pour un certain  $p$ , on sait que la méthode converge vers une solution qui nous assurera, de

plus, que l'ordre de la matrice polyphase de transfert sera minimum.

En dimension supérieure, le processus est le même, excepté qu'il faut faire augmenter les entiers  $(p_1, \dots, p_n)$  de telle sorte que la somme  $\sum_{j=1}^n p_j$  soit minimum.

#### IV. APPLICATION

Nous avons vu que pour caractériser l'inversibilité des bancs de filtres d'analyse on pouvait faire appel à des méthodes différentes suivant le cas auquel on s'intéresse. Cette différence se répercute dans la pratique et nous avons utilisé deux logiciels différents qui nous ont paru adaptés aux problèmes.

##### A. Cas uni-dimensionnel

Précédemment [4] nous avons travaillé sur l'inversion de bancs de filtres dans un cas particulier (où le facteur de redondance  $k'$  était égal au facteur de recouvrement  $k$ ), les calculs réalisés ainsi que les applications utilisant ces bancs de filtres avaient été programmés sous le logiciel de Mathworks : Matlab. Nous avons donc dans un premier temps utilisé ce logiciel pour effectuer le test d'inversibilité dans le cas uni-dimensionnel.

Pour cela nous avons utilisé la boîte à outils "Symbolic Math" [13] de Matlab intégrant de nombreuses fonctions issues du logiciel de calcul formel Maple 8 de Waterloo Maple Inc. Cette bibliothèque nous a permis de construire directement et facilement les matrices polynomiales et de les manipuler grâce aux notations très adaptées de Matlab, en particulier pour extraire les sous-matrices de taille maximale.

Dans le problème que nous avons à traiter les matrices polynomiales extraites avaient généralement pour taille  $16 \times 16$  dont il fallait ensuite calculer les déterminants, ce qui est coûteux en temps de calcul. On comprend alors que la méthode présentée dans le cas uni-dimensionnel est très intéressante puisque dans un cas inversible, on ne va en général extraire et calculer le déterminant que d'un nombre limité de polynômes, ce qui assure des temps de calculs réduits par rapport à une méthode ayant besoin directement de l'ensemble des polynômes.

##### B. Cas multi-dimensionnel

Dans ce cas, la bibliothèque de calcul symbolique que nous avons utilisé précédemment ne disposant pas des fonctions pour les calculs de bases de Gröbner, nous avons cherché un autre logiciel. Nous nous sommes alors tourné vers un logiciel de calcul formel particulièrement bien adapté aux calculs sur les bases de Gröbner : Singular (<http://www.singular.uni-kl.de/>).

Singular est un logiciel libre développé par le département de mathématiques de l'université de Kaiserslautern à la fin des années 80 et spécialisé dans les calculs sur les polynômes avec une attention particulière portée sur l'algèbre commutative, la géométrie algébrique et la théorie des singularités. Il est d'usage courant pour les calculs sur les bases de Gröbner avec de nombreuses fonctions déjà programmées et optimisées, en particulier l'algorithme de Buchberger.

Puisque les programmes déjà réalisés tournaient sous Matlab, nous avons développé un script d'interface pour Matlab enregistrant les polynômes issus des déterminants des mineurs maximaux extraits de la matrice polyphase d'analyse, et exécutant un script sous Singular qui renvoyait la base de Gröbner réduite. Quand le résultat renvoyé par Singular est  $\{1\}$ , on a la preuve que le système considéré est inversible.

##### C. Exemple de calcul d'un inverse

Après avoir vérifié qu'un banc de filtres d'analyse est bien inversible, il restait à calculer pratiquement l'inverse. La méthode de résolution de systèmes linéaires proposée a été programmée sous Matlab. La figure 2 montre les réponses impulsionnelles (en module) de quelques filtres du banc de synthèse ainsi calculés dans le cas uni-dimensionnel où  $N = 16$ ,  $k = 3$ ,  $k' = 7/4$  et  $h_i(n) = \mathbf{E}(i, n)h_a(n)$ , avec

$$\mathbf{E}(i, n) = \frac{1}{\sqrt{k'N}} e^{-\alpha(i - \frac{k'N}{2} + \frac{1}{2})(n - \frac{kN}{2} + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{k'N}}, \text{ et } h_a(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{kN + 1}\right).$$

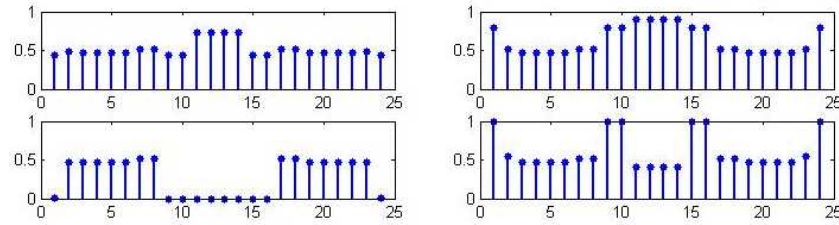


Fig. 2: Exemples de réponses impulsionnelles (en module) d'un banc de synthèse.

## V. CONCLUSIONS

Nous avons présenté dans ce travail des tests d'inversibilité pour un banc de filtres d'analyse donné, et ce, dans les cas uni-dimensionnel et multi-dimensionnel. Dans les deux cas, nous avons expliqué comment mettre en œuvre pratiquement la méthode de test et en particulier l'utilité du logiciel Singular pour les calculs algébriques sur les bases de Gröbner. Une méthode pour déterminer numériquement un inverse particulier a été proposée. Du fait de la redondance, l'inverse ainsi calculé n'est pas unique et il sera donc important de s'intéresser au choix de l'inverse. En particulier, si certaines caractéristiques sont désirables pour le banc de filtres de synthèse, on pourrait imaginer une étape d'optimisation pour arriver à les faire apparaître.

## REFERENCES

- [1] H. Malvar, *Signal processing with Lapped Transforms*, Artech House, 1992.
- [2] H. S. Malvar, "Biorthogonal and nonuniform lapped transforms for transform coding with reduced blocking and ringing artifacts," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, pp. 1043–1053, 1998.
- [3] R. W. Young and N. G. Kingsbury, "Frequency-domain motion estimation using a complex lapped transform," *IEEE Trans. on Image Proc.*, vol. 2, no. 1, pp. 2–17, Jan. 1993.
- [4] J. Gauthier, L. Duval, and J.-C. Pesquet, "A non separable 2D complex modulated lapped transform and its applications to seismic data filtering," in *European Sig. Proc. Conf.*, Sep. 2005.
- [5] T. Tanaka, "A direct design of oversampled perfect reconstruction FIR filter banks of 50%-overlapping filters," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 54, no. 8, pp. 3011–3022, Aug. 2006.
- [6] P. P. Vaidyanathan, *Multirate systems and filter banks*, Prentice Hall, 1993.
- [7] E. Fornasini and M. E. Valcher, "nD polynomial matrices with applications to multidimensional signal analysis," *Multidimensional Sys. and Sig. Proc.*, vol. 8, pp. 387–408, Oct. 1997.
- [8] J. Gauthier, L. Duval, and J.-C. Pesquet, "Low redundancy oversampled lapped transforms and application to 3D seismic data filtering," in *Proc. Int. Conf. on Acoust., Speech and Sig. Proc.*, May 2006, vol. 2, pp. 821–824.
- [9] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1998.
- [10] B. Buchberger, *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*, Ph.D. thesis, Mathematical Institute, University of Innsbruck, Austria, 1965.
- [11] H. Park, T. Kalker, and M. Vetterli, "Gröbner bases and multidimensional FIR multirate systems," *Multidimensional Sys. and Sig. Proc.*, vol. 8, pp. 11–30, Jan. 1997.
- [12] J. Zhou and M. N. Do, "Multidimensional oversampled filter banks," in *SPIE conf. on Wavelet App. in Sig. and Image Proc.*, San Diego, USA, Jul. 2005.
- [13] Mathworks, *Symbolic Math Toolbox - User's Guide*, Sep. 2006, <http://www.mathworks.com/products/symbolic/>.