

Algorithmes d'assimilation thermique avec Openfem : résumé

Frédéric Bourquin et Alexandre Nassiopoulos

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), Paris

Journée LMCS, Novembre 2006

Les méthodes de contrôle de santé des structures basées sur la surveillance en continu des propriétés vibratoires visent à détecter des variations de spectre dues à un endommagement. Ces techniques se heurtent très souvent, et c'est a fortiori le cas en génie civil, à l'influence prédominante des effets thermiques sur le comportement vibratoire ([8]). Ce champ d'applications n'est qu'un exemple parmi tant d'autres où la connaissance de l'état thermique d'une structure dans son ensemble est primordiale. La technologie de capteurs de température ne permettant que des mesures locales, une étape d'assimilation de données est nécessaire afin d'extraire une information globale dans l'espace à partir de ces mesures.

Nous considérons ici le problème de reconstruction du champ de température $\theta(x, t)$ dans un solide à partir de mesures fournies par des capteurs ponctuels répartis dans celui-ci. Le champ est reconstruit pour tout instant d'un intervalle de temps $[0, T]$, mais nous nous intéressons plus particulièrement à la température finale $\theta(x, T)$. La démarche adoptée est celle du contrôle optimal ([9]), utilisée pour la détermination d'un couple de conditions initiales et aux limites à l'origine du champ thermique ayant fourni les mesures. La méthode adjointe est utilisée pour déterminer le gradient d'une fonctionnelle mesurant l'écart entre les mesures et la valeur aux emplacements des capteurs d'un champ reconstruit.

Le travail présenté ici offre un petit aperçu de cette méthode et de la manière avec laquelle elle peut être implémentée très simplement dans un code standard d'éléments finis.

1 Théorie

La méthode adjointe est essentiellement basée sur la résolution de deux équations : l'équation de la diffusion de la chaleur d'une part, et l'équation dite adjointe d'autre part, cette dernière pouvant être vue comme une équation de diffusion dans laquelle le temps a été inversé ([9]).

Soit une structure occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. En l'absence de sources internes de chaleur, et en supposant une température initiale $\theta^0(x)$, l'évolution dans l'intervalle de temps $[0, T]$ du champ de température à l'intérieur de Ω est régie par l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{K} \operatorname{grad} \theta) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ (\mathbf{K} \operatorname{grad} \theta) \cdot \vec{n} + \alpha \theta = \Phi & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

Dans (1), $\Phi(x, t) = g(x, t) + \alpha \theta_{ext}$, g désigne le flux entrant, θ_{ext} la température externe, \vec{n} le vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega$, $x \in \Omega$ la variable d'espace, $t \in [0, T]$ la variable temporelle, ρ la masse volumique, c la chaleur massique et \mathbf{K} le tenseur des conductivités du matériau.

Dans le solide sont répartis m capteurs de température placés aux points x_k , qui fournissent des mesures transitoires notées $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$, $0 \leq t \leq T$. Le problème peut être formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés de la différence entre les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et la valeur aux capteurs d'un champ de température reconstruit. Pour traiter son caractère mathématiquement mal posé au sens de Hadamard, la technique de régularisation de Tikhonov ([7]) est employée pour garantir la stabilité du calcul numérique même avec des données bruitées. On est alors conduit à minimiser une fonctionnelle de la forme

$$J(\{\theta^0, \Phi\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_0^T (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t))^2 dt + \frac{\epsilon}{2} \|\{\theta^0, \Phi\}\|_X^2 \quad (2)$$

Dans (2), le dernier terme correspond au terme de régularisation de Tikhonov, où ϵ désigne un petit paramètre qui donne à J une convexité stricte. Le couple $\{\theta^0, \Phi\}$ recherché est celui qui réalise le minimum de la fonctionnelle J , avec $\{\theta^0, \Phi\} \in X$, X étant un espace de fonctions tel que (1) admette une solution suffisamment régulière. On note $\|\cdot\|_X^2$ la norme de X .

1.1 Minimisation dans L^2

Pour la minimisation de J , un algorithme itératif de descente est employé. Le calcul du gradient ∇J de J est donc nécessaire à chaque itération. Lorsque l'on choisit $X = L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega \times [0, T])$, nous pouvons montrer le gradient de la fonctionnelle est donné par

$$\nabla J(\{\theta^0, \Phi\}) = \{\rho c p(x, 0) + \epsilon \theta^0(x), p(x, t)|_{\partial\Omega} + \epsilon \Phi(x, t)\} \quad (3)$$

où $p(x, t)$ est l'état adjoint solution de

$$\begin{cases} -\rho c \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{K} \operatorname{grad} p) = \sum_{k=1}^m (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)) \delta_{x_k} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ (\mathbf{K} \operatorname{grad} p) \cdot \vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ p(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4)$$

A chaque itération, les deux équations (1) et (4) doivent être résolues successivement.

La condition $p(x, T) = 0$ imposée dans (4) est nécessaire pour que la relation (3) soit valable. Dans le processus itératif, la valeur de la variable de flux $\Phi(x, t)$ mise à jour est une somme pondérée de toutes les valeurs successives de $p(x, t)$, et à cause de cette propriété de l'état adjoint, la valeur de $\Phi(x, T)$ déterminée par minimisation reste nulle à l'instant final T . C'est pour cette raison que la méthode adjointe développée dans le cadre L^2 comme elle l'est classiquement dans la littérature ne permet pas de déterminer avec précision la température près de l'instant final (cf. figure 1). Cette difficulté de convergence près de l'instant final est bien connue et documentée dans la littérature de référence ([1],[10],[2]).

1.2 Minimisation dans H^1

Néanmoins, cette difficulté peut être contournée grâce à un changement de cadre qui consiste à rechercher cette fois le couple $\{\theta^0, \Phi\}$ dans l'espace $X = H^1(\Omega) \times H^1(\partial\Omega \times [0, T])$.

Dans ce nouveau contexte, la solution $p(x, t)$ de (4) n'est plus l'état adjoint de $\theta(x, t)$ donné par (1). Le nouvel état adjoint définissant le gradient de J ([4]) est un couple de fonctions $Q = \{Q_0, Q_1\}$

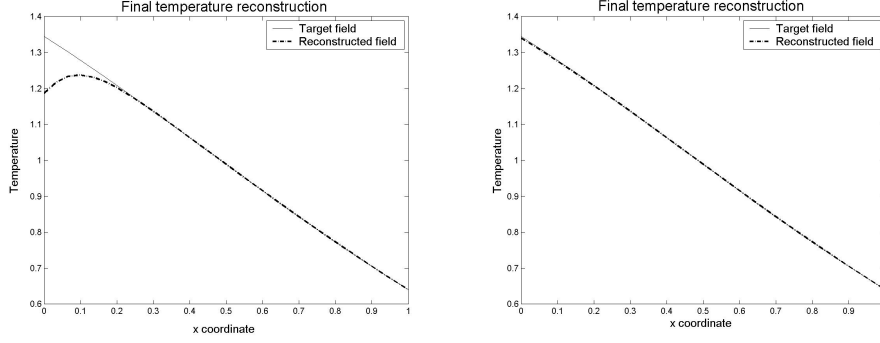


Figure 1: Champ de température dans une poutre (1D) à la fin de l'intervalle de temps utilisé pour l'identification. Ecart entre la température cible et la température reconstruite pour une minimisation dans un cadre L^2 (à gauche) et pour une minimisation dans le cadre H^1 proposé (à droite)

qui vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho c p(\cdot, 0) w \, dx = \bar{\alpha} \int_{\Omega} Q_0 w \, dx + \tilde{\alpha} \int_{\Omega} \text{grad} Q_0 \text{grad} w \, dx \quad \forall w \in H^1(\Omega) \\ \int_{\partial\Omega \times [0, T]} p(x, \cdot) w \, dt = \bar{\beta} \int_{\partial\Omega \times [0, T]} Q_1 w \, d\gamma dt \\ \quad + \tilde{\beta} \int_{\partial\Omega \times [0, T]} \frac{\partial Q_1}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \, d\gamma dt \quad \forall w \in H^1(\partial\Omega \times [0, T]) \end{array} \right. \quad (5)$$

Ces deux problèmes sont des problèmes classiques du Laplacien stationnaire et peuvent donc être facilement résolus grâce à un code standard d'éléments finis. Le gradient de J est donné par

$$\nabla J(\{\theta^0, \Phi\}) = \left\{ Q_0(x) + \epsilon \theta^0(x), Q_1(x, t) + \epsilon \Phi(x, t) \right\} \quad (6)$$

Avec ce gradient, la valeur du flux à l'instant final n'est plus imposée et la reconstruction du champ de température est satisfaisante (cf. figure 1).

1.3 Utilisation des modes de branche

La réduction modale est un outil puissant pour la réduction de la taille des systèmes à résoudre et l'accélération des calculs dans de nombreuses applications. Elle peut être envisagée dans la méthode proposée, en décomposant les champs $\theta(x, t)$ et $p(x, t)$ sur des bases réduites formées des modes propres de l'opérateur de la chaleur. Ces fonctions vérifient un problème de valeurs propres qui s'écrit sous une forme générale

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(\text{grad} u_i) = \lambda_i u_i & \text{dans } \Omega \\ u_i = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad (7)$$

où la frontière de Ω a été décomposée en 3 parties pour plus de généralité ($\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$).

D'autres fonctions intéressantes pour les applications sont les fonctions formant des bases de modes

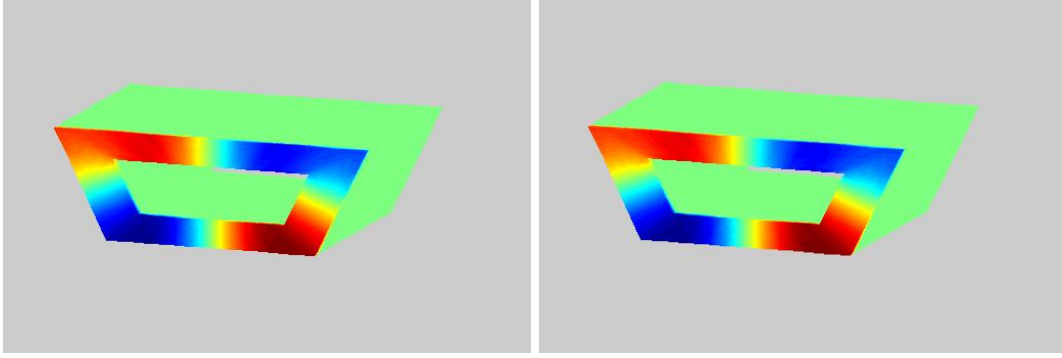


Figure 2: Flux du cinquième mode sur Γ_2 (avec $\zeta = 1$): calcul approché avec 5 modes (à gauche) ; flux de référence (à droite)

de branche. Les modes de branche z_l vérifient le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\operatorname{grad}z_l) + \beta z_l = \mu_l \beta z_l & \text{dans } \Omega \\ z_l = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial z_l}{\partial \vec{n}} + \zeta z_l = \mu_l \zeta z_l & \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial z_l}{\partial \vec{n}} + \zeta z_l = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad (8)$$

On peut montrer que les modes de branches peuvent être utilisés de manière très efficace pour l'approximation de la dérivée normale sur une frontière (flux) de ces modes. Si par exemple la grandeur recherchée est le flux $\Phi = \frac{\partial u_i}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_2}$ sur Γ_2 , il est possible d'en calculer une approximation $P^M \Phi$ sur une base réduite formé par la trace sur Γ_2 des M premiers modes de branche :

$$P^M \Phi = \sum_{l=1}^M \alpha_l z_l \Big|_{\Gamma_2} \quad (9)$$

On montre ([3],[5]) que ce calcul peut être réalisé avec des simples intégrations sur Ω de champs connus puisqu'on obtient la relation :

$$\int_{\Gamma_2} \Phi z_k d\Gamma = (\mu_k \beta - \beta - \lambda_i) \int_{\Omega} u_i z_k dx, \quad k = 1..M \quad (10)$$

Par extension, il est possible de calculer le flux sur une face donnée de tout champ dès lors que celui-ci peut être décomposé sur une base de modes propres. Cette manière de procéder offre une méthode générique de calcul de flux, calcul qui est souvent numériquement très délicat. On constate numériquement que le nombre de modes de branche nécessaire pour atteindre des précisions satisfaisantes sur l'approximation d'un flux donné est en général très faible. Sur l'exemple de la figure 2, 5 modes de branche ont été utilisés pour le calcul du flux sur la tranche d'un modèle de tablier de pont, l'erreur d'approximation obtenue étant inférieure à 1%.

Par ailleurs, les modes de branche peuvent obtenus très facilement avec un code standard d'éléments finis à un haut niveau d'implémentation : il suffit d'ajouter une masse artificielle importante sur la face Γ_2 .

2 Implémentation

L'algorithme d'assimilation proposé repose sur la résolution de deux équations de diffusion (équations (1) et (4) et de deux problèmes de Laplacien stationnaires (équation (5)). Tous ces problèmes sont facilement implémentables dans un code standard d'éléments finis qui permet d'obtenir les matrices de masse et de rigidité liées à l'opérateur Laplacien avec les conditions aux limites souhaitées. Le seul prérequis est de pouvoir avoir accès à la définition du maillage, des degrés de liberté et aux matrices assemblées. Mais ceci est un attribut standard pour de nombreux logiciels libres ou commerciaux orientés vers le calcul scientifique. Une fois les matrices de masse et de rigidité liées au modèle obtenues, les autres briques algorithmiques restent également standard et implémentables aisément : l'algorithme du gradient conjugué est utilisé pour la minimisation de la fonctionnelle, le schéma de Crank-Nicholson pour l'intégration numérique en temps. La construction de l'algorithme peut se faire de manière très modulaire avec des briques algorithmiques éventuellement développées séparément.

Dans notre cas, le logiciel Openfem a été utilisé. Développé par la société SDTools et l'INRIA, Openfem est une boîte à outils sous license LGPL qui permet la réalisation de calculs aux éléments finis orientés vers la mécanique des solides et des structures depuis un environnement de calcul matriciel (Matlab ou Scilab). Grâce à son module pour l'équation de la chaleur développé en partenariat avec le LCPC dans le cadre d'un projet plus global et son architecture générale, Openfem s'est avéré très bien adapté à l'implémentation et le développement de l'algorithme décrit plus haut. Les modules d'optimisation ou d'intégration en temps ont été développés sous Matlab, en s'appuyant lorsque cela a été possible sur des outils prédéfinis : on retrouve par exemple dans Openfem comme dans Matlab des fonctions pour la factorisation des matrices à inverser, ou bien les algorithmes de descente les plus classiques déjà implémentés.

Enfin, les calculs de modes propres ou de modes de branche peuvent aussi être menés aisément avec les outils de résolution disponibles dans Openfem.

3 Conclusions

La technique adjointe appliquée à un problème inverse d'assimilation de données thermiques transitoires a confirmé le défaut de convergence des méthodes de descente pour ce qui est de la température finale. Néanmoins, la recherche de la température initiale et du flux de chaleur au bord du domaine dans des espaces de fonctions assez régulières permettent de s'affranchir de cette difficulté connue de la méthode qui donne alors une bonne reconstruction de la température finale.

L'algorithme présenté ne fait appel qu'à des routines standard d'intégration numérique, et peut être implémenté de manière très aisée avec un code standard d'éléments finis. Le travail proposé a été réalisé sous environnement Matlab avec la boîte à outil Openfem. Ce choix s'avère très satisfaisant pour les besoins de développement. A terme, les auteurs envisagent l'intégration des outils algorithmiques développés à la version courante d'Openfem.

Quelques références bibliographiques

- [1] O. M. Alifanov, *Inverse heat transfer problems*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] J. V. Beck, B. Blackwell, and C. ST. Clair, *Inverse heat conduction, ill-posed problems*, Wiley interscience, New York, 1985.

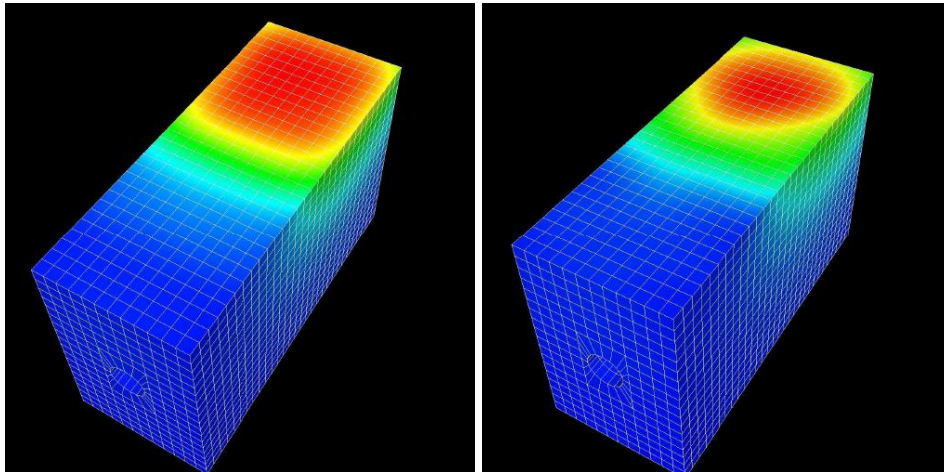


Figure 3: Champ de température dans un solide 3D à la fin de l'intervalle de temps utilisé pour l'identification. Température cible (à gauche) et température reconstruite (à droite)

- [3] F. Bourquin, *Approximate normal stresses for the boundary control of flexible structures*, Proceedings of the European Workshop on Intelligent Structures in Engineering and Technology (Giens, France), May 2002.
- [4] F. Bourquin and A. Nassiopoulos, *Assimilation thermique 1d par méthode adjointe libérée*, Problèmes inverses. Collection Recherche du LCPC, à paraître, 2006.
- [5] ———, *On the use of branch modes for the boundary control of flexible structures*, Proceedings of the European Conference on Smart Systems (Rome, Italy), October 2006.
- [6] ———, *A step towards temperature elimination in structural health monitoring*, Proceedings of the 4th IASC World Conference on Structural Control and Monitoring (San Diego, CA), July 2006.
- [7] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [8] Ch. Farrar, F. Hemez, D. Shunk, D. Stinemat, and B. Nadler, *A review of shm literature: 1996-2001*, Los Alamos National Laboratory Internal Reports (2003).
- [9] J-L. Lions, *Optimal control of systems governed by pdes*, Dunod, 1968.
- [10] M. N. Özisik and H. R. B. Orlande, *Inverse heat transfer*, Taylor and Francis, 2000.