Systèmes complexes

Théorie des perturbations et modélisation: quelques exemples
Journée LMCS 2008
EDF-RD, Chatou

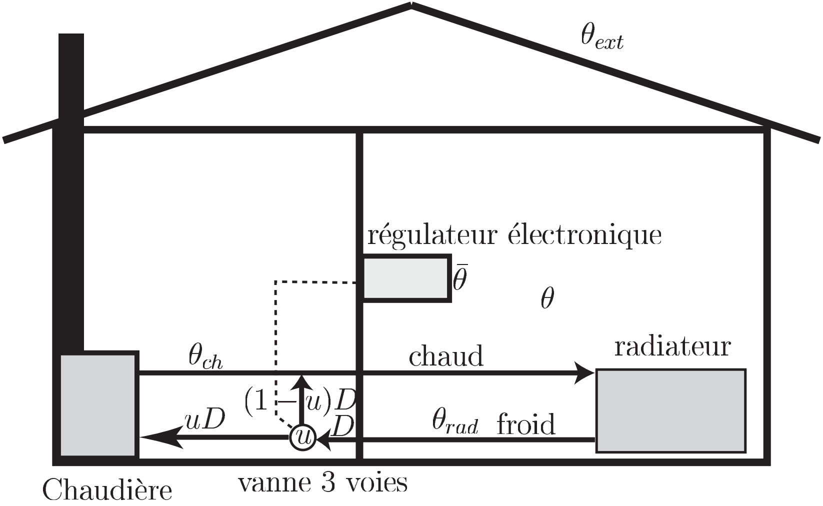
Pierre Rouchon

Centre Automatique et Systèmes
École Nationale Supérieure des Mines de Paris
pierre.rouchon@ensmp.fr

17 avril 2008

Plan

Un premier exemple : PI et thermostat



Régulateur proportionnel intégral (PI) de la température $y = \theta$ à sa consigne $v = \bar{\theta}$ avec une vanne $u \in [0, 1]$, le contrôle.

Régulateur Proportionnel-Intégral (PI) avec prise en compte de la contrainte $u \in [0, 1]$ et anti-emballement du terme intégral (anti-windup)

- PI en temps discret :

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= S^{\mathrm{at}}\left(K_p(\bar\theta - \theta_k) + I_k\right) \\
I_{k+1} &= I_k + \Delta t\ \left[K_i(\bar\theta - \theta_k) + K_s(u_{k+1} - K_p(\bar\theta - \theta_k) - I_k)\right]
\end{aligned}
$$

où $S^{\mathrm{at}}(u) = \max[0, \min(1, u)]$.

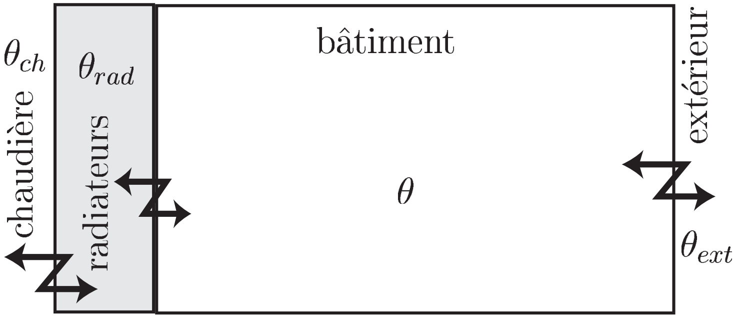
- PI en temps continu : avec $\frac{d}{dt} I\Big|_k \approx \frac{I_{k+1} - I_k}{\Delta t}$, on obtient la version continue

$$
\begin{aligned}
u(t) &= S^{\mathrm{at}}(K_p(\bar\theta - \theta(t) + I(t)) \\
\frac{d}{dt} I(t) &= K_i(\bar\theta - \theta(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar\theta - \theta(t)) - I(t))
\end{aligned}
$$

Sans saturation ($S^{\mathrm{at}} = I$) et avec l'erreur $e = \bar\theta - \theta$, $u = K_p e + I$, $\frac{d}{dt} I = K_i e$ et on retrouve la formule usuelle du correcteur PI

$$
u = K_p e + K_i \int e = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) e \qquad \text{où } \frac{d}{dt} \equiv s.
$$

Modélisation



Modèle thermique simplifié fondé sur les lois de conservation

$$MC_p \frac{d}{dt}\theta = \Lambda_{rad}(\theta_{rad} - \theta) + \Lambda_{ext}(\theta_{ext} - \theta)$$

$$u\Lambda(\theta_{ch} - \theta_{rad}) = \Lambda_{rad}(\theta_{rad} - \theta) \qquad \text{soit} \quad \theta_{rad} = \frac{\Lambda_{rad}\theta + u\Lambda\theta_{ch}}{\Lambda_{rad} + u\Lambda}$$

Ainsi $\frac{d}{dt}\theta$ est une fonction de u, θ, θ_{ext} (θ_{ch} supposée constante ici).

Boucle ouverte et boucle fermée

Avec $x = \theta$ et le contrôle u, la perturbation $w = \theta_{ext}$

- Le système en boucle ouverte

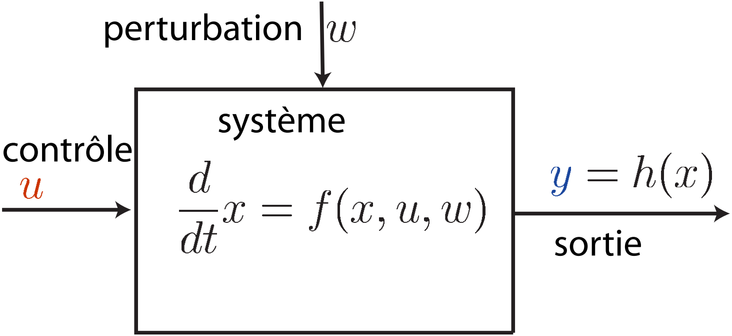
$$\frac{d}{dt}x = f(x, u, w), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in [u^{\min}, u^{\max}]$$

  avec comme seules hypothèses : $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$

- Le système en boucle fermée avec régulateur PI ($K_p, K_i > 0$ et $K_s K_p > K_i$) et sa consigne $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}x &= f\left(x, \mathcal{S}^{at}\left[K_p(\bar{x} - x) + I\right], w\right) \\
\tfrac{d}{dt}I &= K_i(\bar{x} - x) + K_s\left(\mathcal{S}^{at}\left[K_p(\bar{x} - x) + I\right] - K_p(\bar{x} - x) - I\right)
\end{aligned}$$

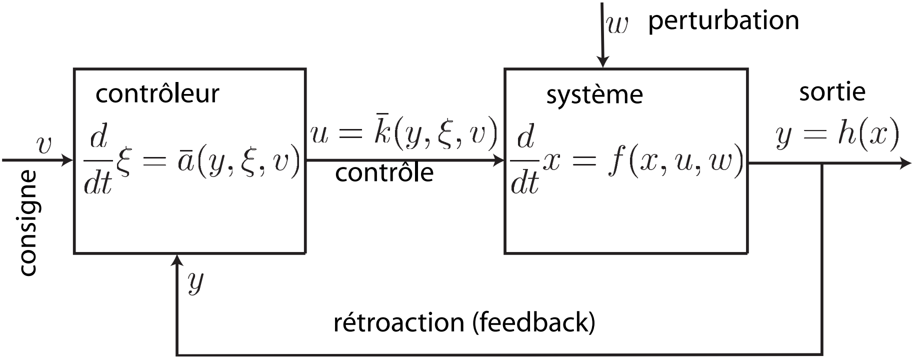
Schéma bloc de la boucle ouverte



Pour le bâtiment

$$u \in [0, 1], \qquad x = \theta, \qquad y = \theta \qquad w = \theta^{ext}$$

Schéma bloc de la boucle fermée



Pour le bâtiment avec le régulateur PI :

$$v = \bar{\theta}, \quad \xi = I, \quad \bar{k} = S^{at}\left[K_p(\bar{\theta}-\theta)+I\right], \quad x = \theta, \quad y = \theta, \quad w = \theta^{ext},$$
$$\bar{a} = K_i(\bar{\theta}-\theta) + K_s\left(S^{at}\left[K_p(\bar{\theta}-\theta)+I\right] - K_p(\bar{\theta}-\theta) - I\right)$$

Stabilité en boucle fermée : énoncé qualitatif.

Quelle que soit la condition initiale $\theta(0)$, la température $\theta(t)$ *converge asymptotiquement* pour t tendant vers $+\infty$ vers le point d'équilibre de consigne $\bar{\theta}$ librement choisi par l'utilisateur (si $\bar{\theta}$ est physiquement réalisable, compte tenu des contraintes sur u et de la température extérieure θ^{ext} supposée constante).

La formalisation précise de ce résultat s'appuie sur

- les équations différentielles ordinaires (EDO) et la théorie des systèmes dynamiques.
- théorie de Poincaré-Bendixon : pas de chaos pour des EDO autonomes dans le plan.

Stabilité en boucle fermée : énoncé précis

Soit le système du premier ordre non-linéaire $\frac{d}{dt}x = f(x,u)$ avec, f continue, dérivable par morceau vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) > 0$ pour tout avec $(x,u) \in \mathbb{R} \times [u^{\min}, u^{\max}]$. Soit le régulateur PI avec anti-emballement de consigne $\bar{x} \in \mathbb{R}$: $u = S^{\text{at}}\left[K_p(\bar{x}-x) + I\right]$, $\frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x}-x) + K_s\left(u - K_p(\bar{x}-x) - I\right)$ avec $K_p, K_i > 0$, $K_s K_p > K_i$ et $S^{\text{at}}(v) = \max(u^{\min}, \min(u^{\max}, v))$. Alors on a les deux cas suivants :

- soit il existe $\bar{u} \in]u^{\min}, u^{\max}[$ tel que $f(\bar{x},\bar{u}) = 0$ et alors l'équilibre $(x, I) = (\bar{x}, \bar{u})$ du système bouclé est unique et globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapounov
- sinon : soit $\forall v \in [u^{\min}, u^{\max}]$, $f(\bar{x}, v) < 0$ (resp > 0) alors $\lim_{t\mapsto+\infty} u(t) = u^{\max}$ (resp $u^{\min}$) et $\lim_{t\mapsto+\infty} x(t)$ existe, est éventuellement infinie dans $[-\infty, \bar{x}[$ (resp. $], +\infty]$) ;
  soit $f(\bar{x}, u^{\max}) = 0$ (resp. $f(\bar{x}, u^{\min}) = 0$) alors $\lim_{t\mapsto+\infty} u(t) = u^{\max}$ (resp. $u^{\min}$) et $\lim_{t\mapsto+\infty} x(t)$ existe, est finie dans $]-\infty, \bar{x}[$ (resp. $], +\infty[$)

Thermostat : le linéaire tangent est toujours stable

Pour (θ, I) autour de l'équilibre $(\bar{\theta}, \bar{I} = \bar{u})$, le système bouclé s'écrit (saturation non active)

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\theta & = & f\left(\theta, K_p(\bar{\theta} - \theta) + I\right) \\ \frac{d}{dt}I & = & K_i(\bar{\theta} - \theta) \end{array}$$

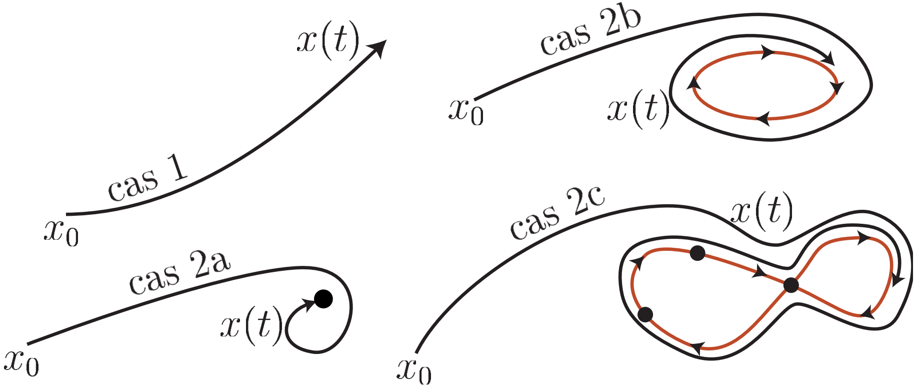
Matrice Jacobienne du linéaire tangent :

$$\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_{(\bar{\theta},\bar{u})} - K_p \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{\theta},\bar{u})} & \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{\theta},\bar{u})} \\ -K_i & 0 \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice 2×2 est strictement négative car $\frac{\partial f}{\partial \theta} \leq 0$ et $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$ par hypothèse et les gains K_p, K_i sont > 0. Son déterminant est strictement positif pour les mêmes raisons. Donc ses deux valeurs propres sont à partie réelle strictement négative. Ainsi, pour tous $K_p > 0$ et $K_i > 0$, le linéaire tangent est toujours stable et donc le non-linéaire est localement asymptotiquement stable.

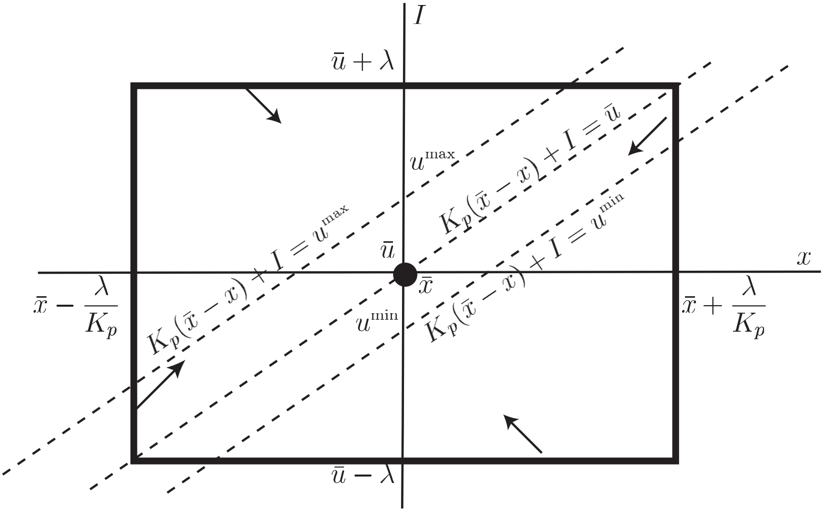
Pas de chaos dans le plan (thèse de Poincaré)

Les quatre comportements asymptotiques possibles pour une trajectoire d'un système dynamique autonome défini dans le plan :



La divergence $\frac{\partial f}{\partial x} - K_p \frac{\partial f}{\partial u}(S^{at})' + K_s((S^{at})' - 1)$ est négative et on a un seul point d'équilibre : reste uniquement le cas 2a.

Les trajectoires sont bornées ($K_s K_p > K_i$)



Le rectangle R_λ est positivement invariant car le champ de vecteurs définissant la dynamique pointe vers l'intérieur de R_λ

Stabilité asymptotique globale

- Le champ de vecteurs $x = (\theta, I)$

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f\left(\theta, S^{\text{at}}\left[K_p(\bar{\theta} - \theta) + I\right]\right) \\ K_i(\bar{\theta} - \theta) + K_s\left(S^{\text{at}}\left[K_p(\bar{\theta} - \theta) + I\right] - K_p(\bar{\theta} - \theta) - I\right) \end{pmatrix}$$

est à divergence strictement négative.

- S'il y avait une orbite périodique englobant un domaine Ω d'aire non nulle, on aurait une contradiction car

$$0 > \int\int_{\Omega} \mathrm{div}\vec{v} = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n}\, ds \quad = 0$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω ($\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ sur $\partial\Omega$, le bord du domaine $\partial\Omega$ est l'orbite périodique).

- Unicité du point d'équilibre.

Théorème (Critère de Bendixon)

Soit

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^2$$

une fonction continue et dérivable. On suppose que

$$div(v)(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) < 0$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$.
Soit $t \mapsto x(t)$ *une solution de* $\frac{d}{dt}x = v(x)$ *qui reste bornée pour les temps* t *positifs. Alors, sa limite quand* t *tend vers* $+\infty$ *est un point d'équilibre, i.e., une solution* $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ *de* $v(\bar{x}) = 0$.

- Système dépendant d'un paramètre ε :

$$\frac{d}{dt}x = v(x, \varepsilon) \quad (\Sigma^\varepsilon)$$

- Hypothèses sur (Σ^0) : $\bar{x}_0$ équilibre, $v(\bar{x}_0, 0) = 0$, et les parties réelles des valeurs propres de $\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{(\bar{x}_0, 0)}\right]$ sont strictement négatives.
- Conclusion sur (Σ^ε) : il existe $\eta > 0$, tel pour tout $\varepsilon \in [-\eta, +\eta]$, le système régulièrement perturbé (Σ^ε) admet un point d'équilibre $\bar{x}(\varepsilon)$ qui dépend régulièrement de ε ($v(\bar{x}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$), qui est hyperboliquement stable (local) et $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$.

En bref : La stabilité hyperbolique de Σ_0 implique celle de Σ_ε. La preuve : fonctions implicites, les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de ses coefficients.

Exemple du PI sur le premier ordre avec dynamique rapide de actionneur (u^m) ($\varepsilon > 0$ petit) :

$$\left\{\begin{array}{rl} \frac{d}{dt}\theta(t) & = f(\theta, u^m) \\ \frac{d}{dt}I(t) & = K_i(\bar{\theta} - \theta(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar{\theta} - \theta^m(t)) - I(t)) \\ u(t) & = S^{\text{at}}(K_p(\bar{\theta} - \theta(t)) + I(t)) \\ \varepsilon\frac{d}{dt}u^m(t) & = u(t) - u^m(t) \qquad \text{En transfert : } u^m = \frac{1}{1+\varepsilon s}u \text{ avec } s = d/dt \ . \end{array}\right. \tag{1}$$

En posant $x = (\theta, I)$ et $z = u^m$, on a

$$\frac{d}{dt}x = f(x, z, \varepsilon), \quad \varepsilon\frac{d}{dt}z = g(x, z, \varepsilon) \quad (\Sigma^\varepsilon)$$

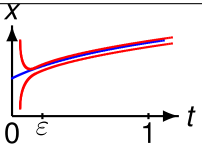
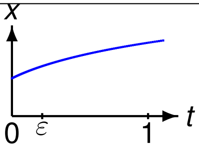
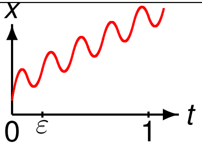
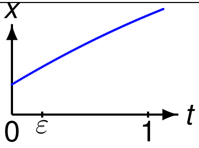
alors que le modèle de contrôle correspond à $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{dt}x = f(x, z, 0), \quad 0 = g(x, z, 0) \quad (\Sigma^0)$$

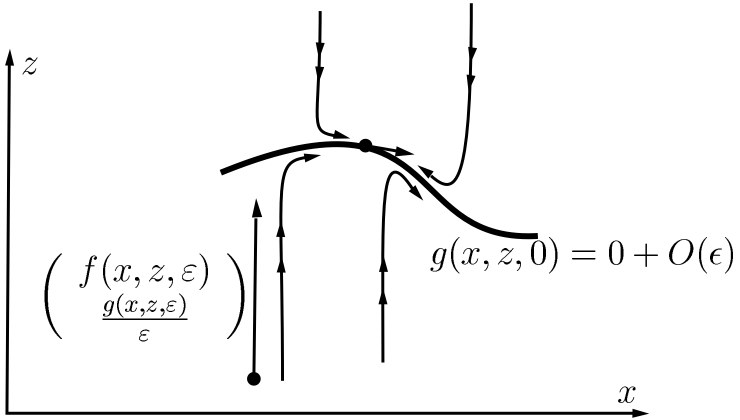
Modèle de contrôle/Modèle de simulation

- On élabore le contrôle sur le modèle approché (Σ^0), dit modèle de contrôle : le système bouclé (Σ_b^0) est hyperboliquement stable (planification et suivi de trajectoires, linéaire quadratique, observateur/contrôleur). Le modèle de simulation sera alors (Σ_b^ε)
- Robustesse : pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le système bouclé perturbé (Σ_b^ε) est aussi hyperboliquement stable (théorie des perturbations régulières et singulières)
- Marge de robustesse : la valeur critique ε^* de ε, à partir de laquelle le système bouclé (Σ_b^ε) devient instable. Dans le cas linéaire stationnaire, on a une idée de ε^* avec les marges de gain et de retard (marge de phase) obtenues via les diagrammes de Nyquist et de Bode. Dans les autres cas (linéaire instationnaire, non linéaire, ...) on effectue des simulations en boucle fermée (facile) et/ou des études de bifurcation (nettement plus difficile).

Systèmes multi-échelles et théorie des perturbations

	système lent-rapide	$\longrightarrow$	système lent
perturbations singulières		$\longrightarrow$	
moyennisation		$\longrightarrow$	

On élimine les effets à court terme, $t \sim \varepsilon$, qu'ils soient hyperboliquement stables ou oscillants, pour ne conserver que les effets à long terme, $t \sim 1$ $(0 < \varepsilon \ll 1)$



$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= f(x,z,\varepsilon) \\ \varepsilon \dfrac{dz}{dt} &= g(x,z,\varepsilon) \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^p$,
$0 < \varepsilon \ll 1$ un petit paramètre,
f et g des fonctions régulières.

Condition pour que $\Sigma_\varepsilon \approx \Sigma_0$.

Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, l'approximation de

$$(\Sigma^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & f(x,z,\varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} & = & g(x,z,\varepsilon) \end{array} \right. \quad \text{par} \quad (\Sigma^0) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & f(x,z,0) \\ 0 & = & g(x,z,0) \end{array} \right.$$

est justifiée (voir énoncé précis dans le poly) dès que l'équation $g(x,z,0) = 0$ admet une solution, $z = \rho(x)$, avec ρ fonction régulière de x et dès que $\frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0)$ est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

Le modèle réduit est alors $\frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$

Persistance de la stabilité

- On part de

$$(\Sigma^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & f(x,z,\varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} & = & g(x,z,\varepsilon) \end{array} \right.$$

avec $g(x,\rho(x),0) = 0$
$\frac{\partial g}{\partial z}(x,\rho(x),0)$ matrice stable
et $0 < \varepsilon \ll 1$.

- On suppose en plus que système lent $\frac{d}{dt}x = f(x,\rho(x),0)$ admet un point d'équilibre $\bar{x}$: $f(\bar{x},\rho(\bar{x}),0) = 0$ avec la matrice $\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}\right]_{(\bar{x},\rho(\bar{x}),0)}$ stable.
- Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ assez proche de 0, le système perturbé (Σ^ε) admet un point d'équilibre proche de $(\bar{x},\rho(\bar{x}))$ et dont le linéaire tangent est asymptotiquement stable (stabilité hyperbolique)

En bref : ici encore la stabilité hyperbolique de Σ_0 implique celle de Σ_ε.

Robustesse du PI et choix des gains K_p et K_i.

Le PI sur le premier ordre avec dynamiques de l'actionneur :

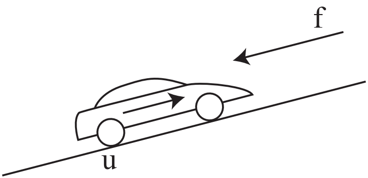
$$(\Sigma^\varepsilon) \left\{ \begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\theta(t) &= f(\theta, u^m) \\ \tfrac{d}{dt}I(t) &= K_i(\bar\theta - \theta(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar\theta - \theta(t)) - I(t)) \\ \varepsilon \tfrac{d}{dt}u^m(t) &= u(t) - u^m(t) \\ u(t) &= S^{\text{at}}(K_p(\bar\theta - \theta(t)) + I(t)). \end{aligned} \right.$$

est sous forme standard avec $X = (\theta, I)$ et $Z = u^m$. La dynamique lente est hyperboliquement stable. Donc l'équilibre en $\theta = \bar\theta$ de (Σ^ε) est aussi hyperboliquement stable dès que $0 < \varepsilon \ll 1$, c'est à dire, dès que

$$\varepsilon K_p \frac{\partial f}{\partial u} \ll 1, \quad \varepsilon \frac{K_i}{K_p}\frac{\partial f}{\partial u} \ll 1, \quad \varepsilon K_s \ll 1$$

Il ne faut pas choisir K_p, K_i et K_s trop grands pour ne pas exciter les dynamiques négligées.

Cascade de PI sur un second ordre non-linéaire



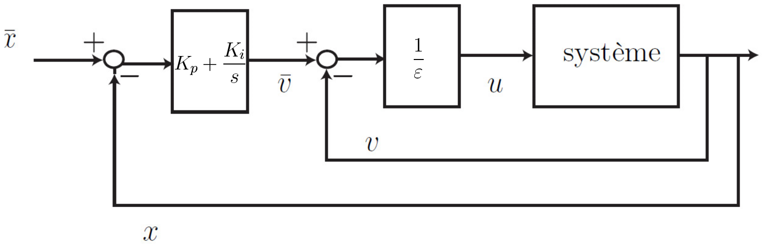
Newton : $\frac{d^2}{dt^2}x = f(x, \frac{d}{dt}x) + u$

Problème : "cruise-control" avec f mal connue, asservir la position à $\bar{x}$, une seule commande u pour deux états $(x, \frac{d}{dt}x)^T$.

Solution : on se ramène à deux systèmes du premier ordre avec une cascade de deux régulateurs.

- un régulateur en vitesse "esclave" rapide dont la consigne est fixée par le régulateur "maître".
- un régulateur en position "maître" lent qui définit la consigne de vitesse pour le régulateur "esclave".

Cascade de deux régulateurs



1. Régulateur esclave P, $u = \frac{\bar{v}-v}{\varepsilon}$, avec $0 < \varepsilon \ll 1$, assure la convergence rapide de la vitesse $v = \frac{d}{dt}x$ vers une consigne $\bar{v}$ lentement variable.
2. Régulateur maître PI ($K_p, K_i > 0$)

$$\bar{v} = K_p(\bar{x} - x) + I, \quad \frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x} - x)$$

stabilise la position x à $\bar{x}$ et fournit la consigne lentement variable $\bar{v}$ au régulateur rapide précédent.

Voir la simulation Scilab/Sicos : `CascadePI.cos` avec la prise en compte dans le feedback des contraintes sur l'état v et sur le contrôle u.

Moyennisation à une fréquence ($0 \leq \varepsilon \ll 1$)

Considérons le système perturbé

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

avec f régulière et de période T par rapport à t. Il existe un changement de variables

$$x = z + \varepsilon w(z, t)$$

avec w de période T en t, tel que

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \bar{f}(z) + \varepsilon^2 f_1(z, t, \varepsilon)$$

avec

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, t, 0)\, dt$$

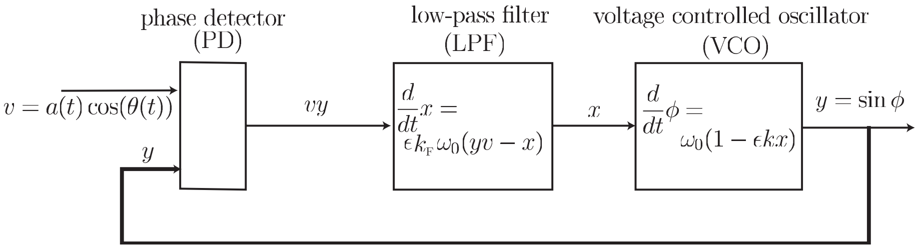
et f_1 régulière de période T en t.
Le système moyen (modèle réduit) est alors $\frac{d}{dt} z = \bar{f}(z)$. Ici z est proche de x.

Moyennisation à une fréquence (fin)

- Si $x(t)$ et $z(t)$ sont, respectivement, solutions du système perturbé et du système moyen, avec comme conditions initiales x_0 et z_0 telles que $\|x_0 - z_0\| = O(\varepsilon)$, alors $\|x(t) - z(t)\| = O(\varepsilon)$ sur un intervalle de temps de l'ordre de $1/\varepsilon$.
- Si $\bar{z}$ est un point fixe hyperbolique du système moyen, alors il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0, \bar{\varepsilon}]$, le système perturbé admette une unique orbite périodique hyperbolique $\gamma_\varepsilon(t)$, proche de $\bar{z}$, $\gamma_\varepsilon(t) = \bar{z} + O(\varepsilon)$, qui peut être réduite à un point, et dont la stabilité est du même type que celle de $\bar{z}$[1] En particulier, si $\bar{z}$ est asymptotiquement stable, alors γ_ε est aussi asymptotiquement stable et l'approximation, à $O(\varepsilon)$ près, des trajectoires du système perturbé par celles du système moyen devient valable pour $t \in [0, +\infty[$.

[1] Le nombre des multiplicateurs caractéristiques de γ_ε de module strictement inférieur (resp. supérieur) à 1 est égal au nombre d'exposants caractéristiques de $\bar{z}$ à partie réelle < 0 (resp. > 0).

Boucle à verrouillage de phase (PLL)



La quantité $\omega_0(1 - \epsilon k x)$ est une estimation filtrée de la fréquence $\frac{d}{dt}\theta$ du signal d'entrée v qui peut être très fortement bruité et dont l'amplitude a n'est pas connue.

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon k_f \omega_0 (v(t)\sin\phi - x), \qquad \frac{d}{dt}\phi = \omega_0(1 - \epsilon k x)$$

où ϵ est un petit paramètre positif, k_f et k deux gains positifs. On pose $v(t) = a\cos\theta$ avec $\frac{d}{dt}\theta = \omega_0(1 + \epsilon p)$ où $a > 0$ et p sont des paramètres inconnus mais constants (voir simulation Scilab/Scicos).

Comme $2\cos\theta\sin\phi = \sin(\phi-\theta)+\sin(\phi+\theta)$, avec $\Delta = \phi - \theta$ et $\sigma = \phi + \theta$, le système

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon k_f \omega_0 (a\cos\theta\sin\phi - x), \quad \frac{d}{dt}\phi = \omega_0(1-\epsilon kx), \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega_0(1+\epsilon p)$$

devient dans l'échelle de temps σ ($\frac{d}{dt}\sigma = \omega_0(2+\epsilon(p-kx))$)

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \, \frac{\frac{a}{2}\sin\Delta + \frac{a}{2}\sin\sigma - x}{2+\epsilon(p-kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \, \frac{p+kx}{2+\epsilon(p-kx)}.$$

Le système moyen est

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \, \frac{\frac{a}{2}\sin\Delta - x}{2+\epsilon(p-kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \, \frac{p+kx}{2+\epsilon(p-kx)}.$$

On néglige des termes d'ordre 2 en ϵ et on prend comme système moyen :

$$\frac{d}{d\sigma}x = \frac{\epsilon k_f}{2}\left(\frac{a}{2}\sin\Delta - x\right), \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\frac{\epsilon}{2}(p + kx).$$

Ce système s'écrit aussi sous la forme d'une seule équation du second ordre avec $\sigma/\varsigma = \epsilon\sqrt{k_f ka/8}$

$$\frac{d^2}{d\varsigma^2}\Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}}\,\frac{d}{d\varsigma}\Delta - \left(\sin\Delta - \frac{2p}{ak}\right).$$

On choisit le gain k assez grand pour que $\left|\frac{2p}{ak}\right| < 1$. Ainsi on pose $\sin\bar{\Delta} = \frac{2p}{ak}$ avec $\bar{\Delta} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ce système admet donc deux points d'équilibre (angle défini à 2π près) :

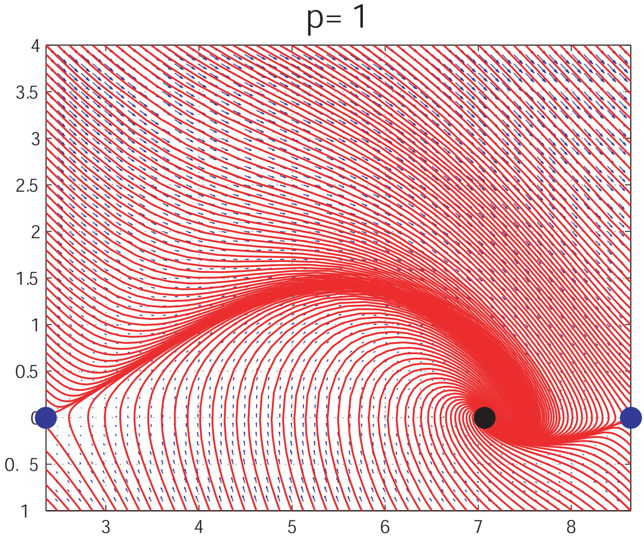
- $\Delta = \pi - \bar{\Delta} \mod (2\pi)$ est un col (deux valeurs propres réelles de signes opposés)
- $\Delta = \bar{\Delta} \mod (2\pi)$ est localement asymptotiquement stable (deux valeurs propres à partie réelle strictement négative).

$\frac{d^2}{d\varsigma^2}\Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}}\ \frac{d}{d\varsigma}\Delta - \left(\sin\Delta - \frac{2p}{ak}\right)$ avec Δ dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$ (système du premier ordre sur le cylindre $(\Delta, \frac{d\Delta}{d\sigma}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$). On reprend en partie les arguments utilisés pour le PI avec anti-emballement :

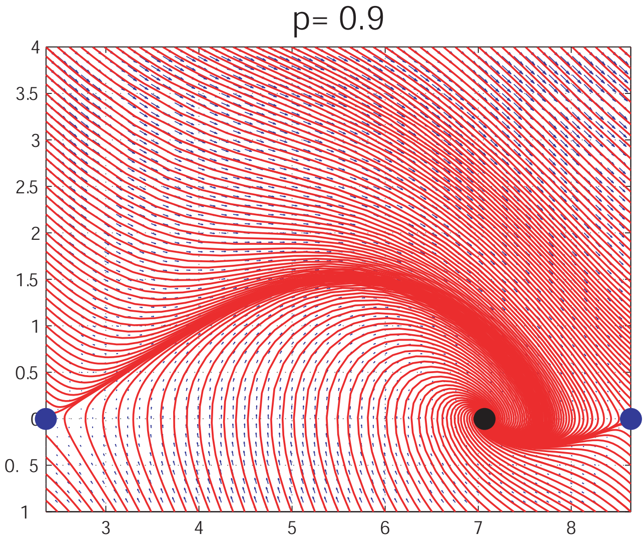
- Le calcul de la divergence du champ de vecteur dans les coordonnées $(\Delta, \Omega = \frac{d\Delta}{d\sigma})$ donne $-\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} < 0$. Les trajectoires sont bornées dans le cylindre (la vitesse est bornée).
- Ainsi, il ne peut y avoir au plus qu'une seule orbite périodique et de plus elle fait un tour autour du cylindre.
- Pour k et k_f assez grands, on a deux points d'équilibre et on n'a pas d'orbite périodique (bifurcation globale fondée sur l'espace rentrant du col $\pi - \bar{\Delta}$ qui en se confondant avec l'espace sortant (orbite homocline) détruit un cycle limite).

En résumé : pour k et k_f assez grands $\Delta = \phi - \theta$ converge vers une constante (le point $\bar{\Delta}$: c'est le verrouillage de phase.

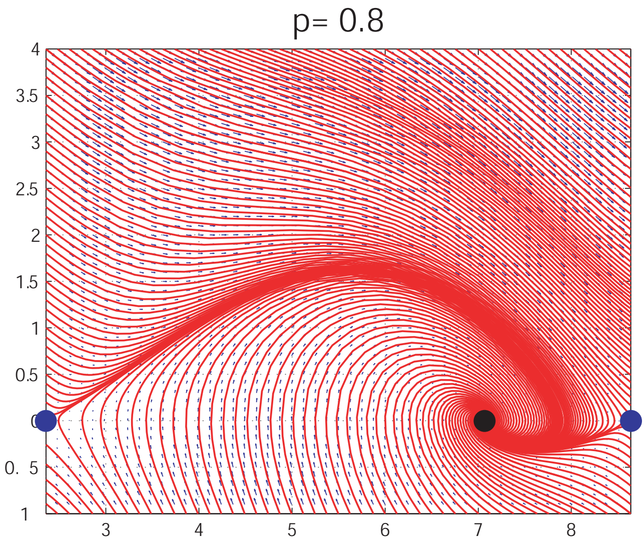
Bifurcation globale $\frac{d^2}{dt^2}\Delta = -p\frac{d}{dt}\Delta - \sin\Delta + \frac{1}{\sqrt{2}}$



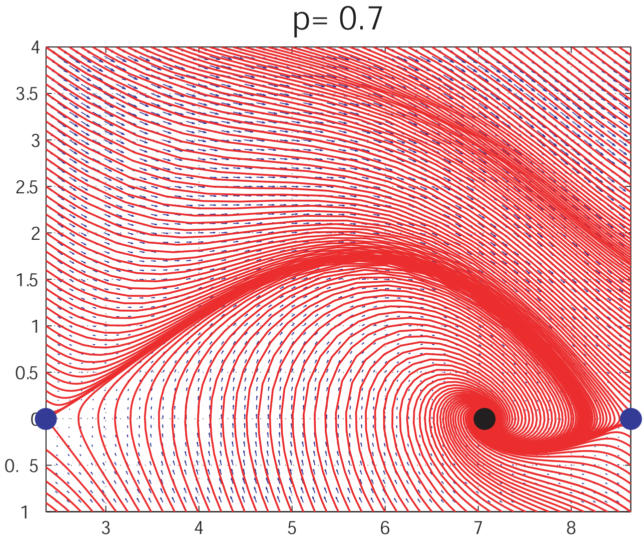
Un seul régime asymptotique : équilibre



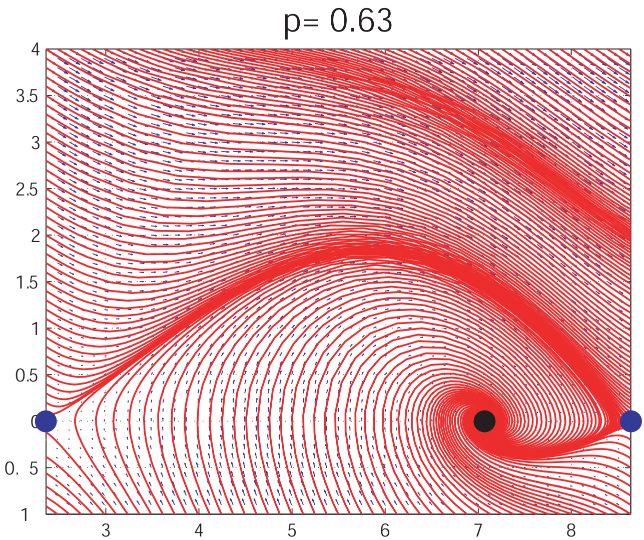
Un seul régime asymptotique : équilibre



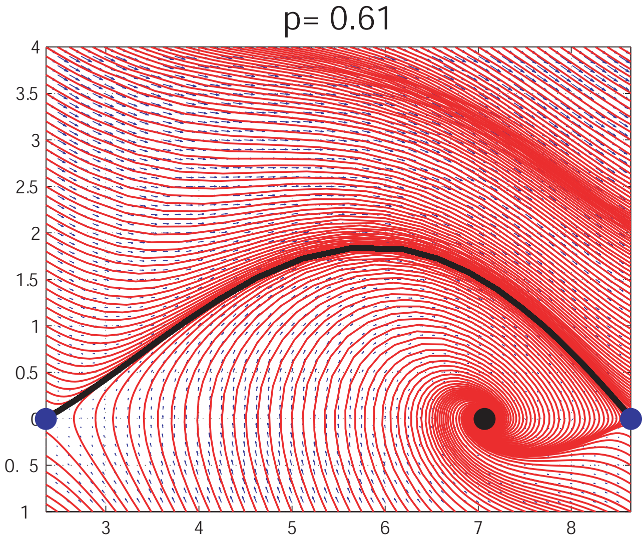
Un seul régime asymptotique : équilibre



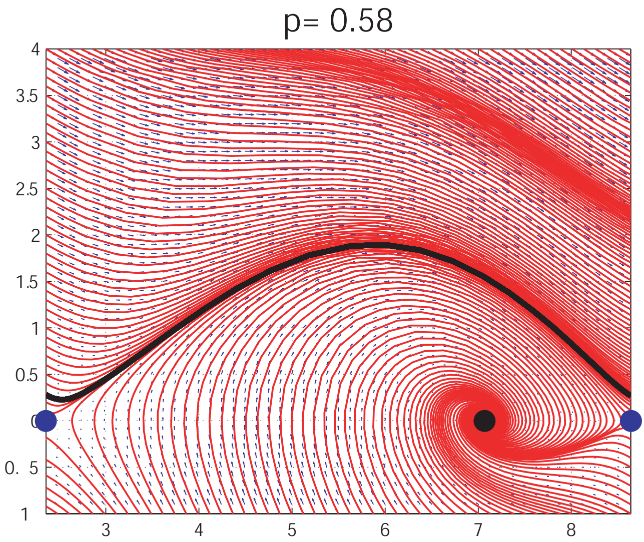
Un seul régime asymptotique : équilibre



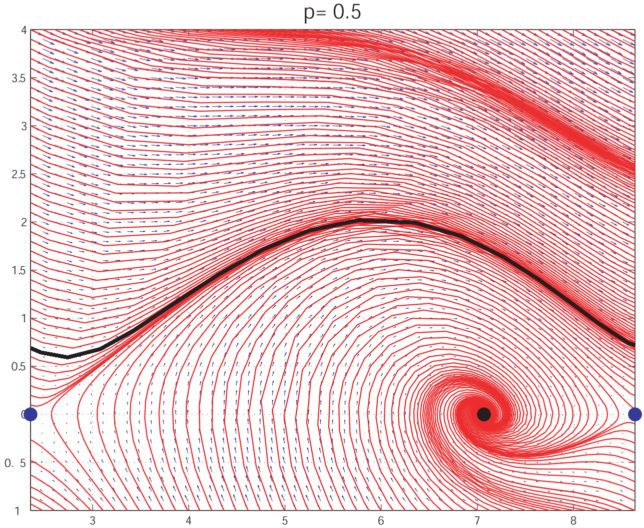
Bifurcation globale : un cycle limite apparaît (orbite homocline)



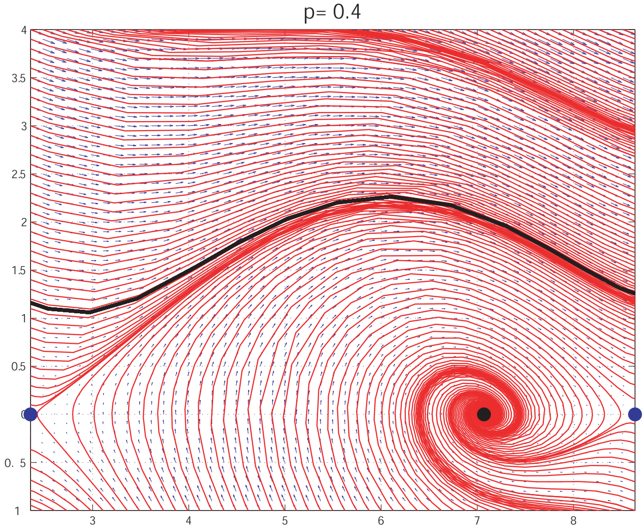
Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



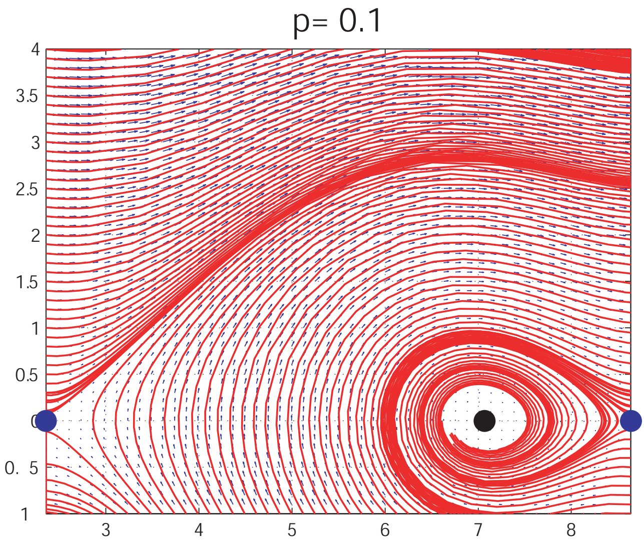
Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Deux régimes asymptotiques : cycle limite ou équilibre



Conclusions

Systèmes complexes : systèmes dynamiques non-linéaires de petite dimension et cependant avec des comportements très variés ; le global est souvent très different du local.

- PI avec "anti-windup", système plan et Poincaré/Bendixon : importance de l'étude qualitative des solutions d'équations différentielles ordinaires.
- Systèmes lents/rapides et approximation quasi-statique : décomposition en diverses échelles, cascades de régulateurs et contrôle hiérarchisé.
- Moyennisation, synchronisation d'oscillateurs et PLL : bifurcation globale explique le petit bassin d'attraction d'une PLL en général (récepteurs GPS avec des réseaux de PLL).

Références systèmes dynamiques et contrôle

- la BD des systèmes dynamiques en 4 volumes : R.H. Abraham and C.D. Shaw. Dynamics – The Geometry of Behavior : I-IV. Aerial Press, Santa Cruz, California, 1981.
- EDO, systèmes plans, et contrôle (très pédagogique et pourtant d'un excellent niveau) A. Andronov, S. Khaikin and A. Vitt : Theory of Oscillators. Dover (English Translation), 1987.
- *Systèmes dynamiques (très bonne introduction aux EDO)* V. Arnold : Equations différentielles ordinaires. Mir Moscou, 1974.
- *Bifurcation et théorie de perturbation et KAM (très avancé)* V. Arnold : Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires. Mir Moscou, 1980.
- *Idem ci-dessus* : J. Guckenheimer and P. Holmes : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 1983.
- *Contrôle non linéaire (théorie) :* H. Khalil : Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.