Nouvelle méthode de construction de benchmarks de grande taille et fortement couplés pour solveurs EDOs

[T.H. Gallois, J. Brac] (IFPEN), T. Soriano (SUPMECA)

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Introduction

- Tester la valeur d'un nouveau solveur EDO sur un exemple de taille réglable et plus ou moins couplé
- Etudier le comportement du solveur sur un système de très grande taille
- Mise en évidence de stratégies de parallélisation plus ou moins efficaces selon le couplage du modèle

Présentation du problème

Définition du problème continu :

$$\begin{cases} t \in I = [t_{deb} = 0, t_{fin}] \subset \mathbb{R} \\ f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ y \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y} = f(t, y) \\ y(t = t_{deb}) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
  - Nécessité de connaître la solution analytique
  - Nécessité de présenter le problème sous forme matricielle
  - Nécessité de régler la densité de la matrice A
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
  - Nécessité de connaître la solution analytique
  - Nécessité de présenter le problème sous forme matricielle
  - Nécessité de régler la densité de la matrice A
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Nécessité de connaître la solution analytique

- valider la solution donnée par le solveur
- comparer la précision des solutions entre deux solveurs
- vérifier que la tolérance est respectée
- à défaut possibilité d'utiliser un schéma d'Euler à pas de temps très petit

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
  - Nécessité de connaître la solution analytique
  - Nécessité de présenter le problème sous forme matricielle
  - Nécessité de régler la densité de la matrice A
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Nécessité de présenter le problème sous forme matricielle

Pour les modèles linéaires reformuler le problème EDO sous forme matricielle :

$$\begin{cases} t \in I = [t_{deb} = 0, t_{fin}] \subset \mathbb{R} \\ B \in \mathbb{R}^n, A \in M_n(\mathbb{R}) \\ y \in \mathbb{R}^n \\ \dot{y} = Ay + B \\ y(t = t_{deb}) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

- en discrétisant les dérivées spatiales du modèle
- par lecture de la fonction f
- par identification des coefficients de A et B en appliquant la base canonique au problème.

identification des coefficients de A et B

- Identification du vecteur B en appliquant le vecteur nul à f
- identification colonne par colonne de A en appliquant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

etc.

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
  - Nécessité de connaître la solution analytique
  - Nécessité de présenter le problème sous forme matricielle
  - Nécessité de régler la densité de la matrice A
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Nécessité de régler la densité de la matrice A

- A est initialement décrite dans la base canonique $E_0 = (e_1, \dots, e_n)$ des variables d'état du modèle.
- construire la base $E_\alpha = (e_{\alpha,1}, \dots, e_{\alpha,n})$

$$\begin{cases} e_{\alpha,1} = & \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2 \\ e_{\alpha,2} = & -\sin(\alpha)e_1 + \cos(\alpha)e_2 \\ e_{\alpha,3} = & e_3 \\ \vdots & \\ e_{\alpha,n} = & e_n \end{cases}$$

- $P_1^{E_0 \to E_\alpha}$ la matrice de changement de base

Nécessité de régler la densité de la matrice A

- A_α la matrice de l'endomorphisme f de E_α into E_α
  $A_\alpha = (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^{-1} A \, P_1^{E_0 \to E_\alpha} \; = (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t A \, P_1^{E_0 \to E_\alpha}$
- le nouveau système EDO :

$$\begin{aligned}(P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t \dot{X}(t) =& (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t (A\, X(t) + B)\\ =& (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t A \, P_1^{E_0 \to E_\alpha} (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t \; X(t)\\ &+ (P_1^{E_0 \to E_\alpha})^t B\end{aligned}$$

- finalement :

$$\dot{X}_\alpha(t) = A_\alpha X_\alpha(t) + B_\alpha \tag{3}$$

$\hookrightarrow$ A_α est plus dense que A
$\hookrightarrow$ répéter le processus en décalant les rotations jusqu'à obtenir une matrice A dense.

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
  - Modèle de diffusion de la chaleur 1D
  - Critères de qualité du modèle
  - Complexification du modèle à 5 mailles
- Résultats

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
  - Modèle de diffusion de la chaleur 1D
  - Critères de qualité du modèle
  - Complexification du modèle à 5 mailles
- Résultats

Modèle de diffusion de la chaleur 1D

- tige de métal de longueur L supposée être assez fine pour permettre une modélisation 1D
- température maintenue constante aux deux extrémités

On a l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial X}\left(\alpha \dfrac{\partial T}{\partial X}\right) \\ T(X, t = 0) = T_0(X) \quad \forall X \in [0, L] \\ T(X = 0, t) = T_l \quad \forall t \geq 0 \\ T(X = L, t) = T_r \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
  - Modèle de diffusion de la chaleur 1D
  - Critères de qualité du modèle
  - Complexification du modèle à 5 mailles
- Résultats

Critères de qualité du modèle

- Solution analytique de 4 connue
- En discrétisant la dérivée spatiale :

$$\frac{\partial T(i)}{\partial t} = \frac{\alpha}{dx^2}(T(i+1) - 2T(i) + T(i-1)) \tag{5}$$

  - On règle la taille du modèle
  - On passe sous forme matricielle

$$\dot{T}(t) = AT(t) + B \tag{6}$$

$$\text{with } A = \frac{\lambda}{dx^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

  - On règle le couplage

Plan

- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
  - Modèle de diffusion de la chaleur 1D
  - Critères de qualité du modèle
  - Complexification du modèle à 5 mailles
- Résultats

Complexification du modèle à 5 mailles

On considère 5 mailles dans la tige :

$$\dot{X}(t) = \frac{\lambda}{dx^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X(t) + \frac{\lambda}{dx^2} \begin{pmatrix} T_l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_r \end{pmatrix} \tag{7}$$

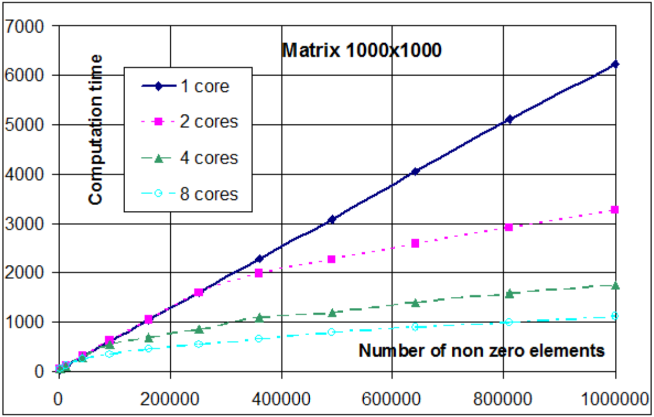
Après 4 rotations :

$$A_4 = \frac{\lambda}{dx^2} \begin{pmatrix} -1.13 & 0.50 & 0.43 & -0.37 & 0.65 \\ 0.50 & -1.78 & 0.81 & 0.16 & -0.28 \\ 0.43 & 0.81 & -1.84 & 0.86 & 0.24 \\ -0.37 & 0.16 & 0.86 & -1.88 & 0.29 \\ 0.65 & -0.28 & 0.24 & 0.29 & -3.37 \end{pmatrix}$$

Plan

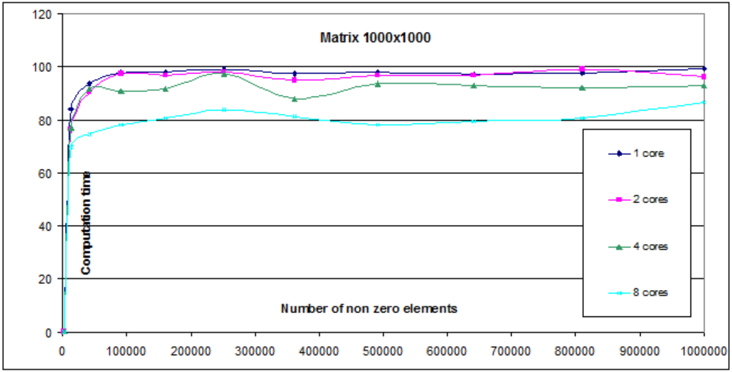
- Introduction et présentation du problème
- Critères de qualité d'un benchmark
- Description du benchmark choisi
- Résultats

Résultats



- Temps de calcul en fonction du nombre d'éléments non nuls
- Le benchmark choisi permet d'adapter le couplage
- Rôle important du couplage sur les effets de la parallélisation

Résultats



- Pourcentage de coût de calcul de $\dot{X} = AX + B$ par rapport au coût total de calcul.
- Le coût de calcul de la dérivée par rapport au coût total augmente avec le couplage